

Esther BRUNNER, CH-Kreuzlingen

Argumentieren und Beweisen – eine spezifische Form der sozialen Interaktion

1 Theoretischer Hintergrund

Argumentieren und Beweisen wird in Bildungsstandards (vgl. Blum, 2006; EDK, 2011; NCTM, 2000) als zentrale mathematische Kompetenz konzipiert. Diese wichtige Kompetenz vollzieht sich im Diskurs und damit in der Interaktion mit anderen. Ein Beweis oder eine Argumentation wird von der Community auf Stichhaltigkeit hin geprüft, verworfen oder akzeptiert (vgl. Heintz, 2000). Beweisen und Argumentieren ist damit eine spezifische fachliche Art der sozialen Interaktion.

Als anspruchsvolle Tätigkeit verlangt Beweisen im schulischen Kontext vielfältige Unterstützung. Diese kann einerseits auf inhaltlicher Ebene und andererseits auf der Ebene des Dialogs und der Partizipation geboten werden. Eine Unterstützung auf inhaltlicher Ebene kann durch die Art des gewählten Beweises erfolgen, wobei Beweise bezüglich der Repräsentation des Denkens (vgl. Aebli, 1981) unterschieden werden können. Wittmann und Müller (1988) beispielsweise führen den experimentellen Beweis, den inhaltlich-anschaulichen Beweis und den formal-deduktiven Beweis auf. Ersterer bleibt auf das verwendete Beispiel bezogen und versucht, durch systematisches Probieren einen Zusammenhang zu erschliessen und zu prüfen, ob dieser auch für weitere Beispiele gilt. Allerdings fehlt damit die Gewissheit, dass etwas *immer* gilt. Der inhaltlich-anschauliche Beweis versucht, vorhandene Zusammenhänge aufzudecken, sichtbar zu machen oder sie im Sinne eines Konstruktionsbeweises zu *zeigen*. Formal-deduktive Beweise hingegen bedienen sich einer streng logischen Vorgehensweise und verwenden für die Formulierung von Zusammenhängen die algebraische Sprache. Damit weisen die drei Beweistypen nicht nur eine unterschiedliche Ausprägung der Abstraktion auf, sondern bieten auch unterschiedliches Potenzial für einen reichhaltigen mathematischen Diskurs. Während bei Vorgehensweisen, die an Beispiele gebunden bleiben und damit vergleichsweise wenig abstrakt sind, eine hohe Partizipation aller Lernenden möglich sein müsste, dürfte dies beim formal-deduktiven Vorgehen aufgrund seines höheren Abstraktionsgrades nur erschwert der Fall sein. Dieser Beitrag geht deshalb der Frage nach, welche unterschiedlichen Beweistypen beim gleichen innermathematischen Beweisproblem in 32 Klassen der Sekundarstufe I vorkommen und wie deren Bearbeitung im Diskurs realisiert wird.

2 Methode

Die vorliegende Studie bezieht sich auf den Datensatz des Projekts „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“ (Klieme, Pauli & Reusser, 2009), das auch als „Pythagoras-Studie“ bekannt ist. In 32 deutschen und Schweizer Klassen der Sekundarstufe I (8./9. Schuljahr) wurde u.a. eine standardisierte innermathematische Beweis- und Begründungsaufgabe durchgeführt. Bei der für die Studie videografierten Bearbeitung dieser Aufgabe waren die Lehrpersonen frei.

Ziel der zu präsentierenden Videostudie war es, einen möglichst umfassenden Blick auf alltägliches Beweisen zu werfen. Auf der Basis einer ausführlichen Aufgabenanalyse wurde zunächst ein fachdidaktisches Analyseinstrument entwickelt, mit dem die Bearbeitung der Begründungsaufgabe hinsichtlich der inhaltlichen Lösungsschritte wie auch bezüglich deren Umsetzung im Gespräch erfasst werden konnte (Details dazu in Brunner, 2012, 2013). Als eines dieser inhaltlichen Merkmale wurde auch der Beweistyp erfasst.

Die Analyse der inhaltlichen Lösungsschritte wurde verbunden mit der Art und Weise, wie sie im Unterrichtsgespräch realisiert werden. Dazu wurden unterschiedliche Kommunikationsmuster beschrieben (Details dazu in Brunner, 2012, 2013), die sich u.a. bezüglich der Steuerung der Lehrperson und der Länge der Redebeiträge der Lernenden unterscheiden. So beschreibt Kommunikationsmuster 1 im Wesentlichen ein Modelling durch die Lehrperson, bei dem keine aktive Partizipation der Lernenden vorgesehen ist. Kommunikationsmuster 2 hingegen beschreibt ein I-R-E-Muster (Mehan, 1979) mit hoher Steuerung der Lehrperson und Kurzantworten der Lernenden. In Kommunikationsmuster 3 geht die Steuerung der Lehrperson demgegenüber zugunsten höherer Partizipation und längerer Redebeiträge der Lernenden zurück.

Der vorliegende Beitrag befasst sich ausschliesslich mit den Beweistypen und deren Realisierung im Unterrichtsgespräch.

3 Ergebnisse

Alle drei unterschiedlichen Beweistypen traten bei der Bearbeitung der gleichen innermathematischen Beweis- und Begründungsaufgabe auf, allerdings in unterschiedlicher Häufigkeit: In 21 Klassen (65.5 %) wurde ein formal-deduktiver Beweis erarbeitet. Vier Klassen (12.5 %) arbeiteten experimentell und in zwölf Klassen (37.5 %) konnte ein inhaltlich-anschauliches Vorgehen beobachtet werden. Neun Klassen bearbeiteten die Aufgabe mit zwei unterschiedlichen Beweistypen, während vier Klassen

keinen Beweistyp umsetzten, obwohl sie ebenfalls an der gleichen Aufgabenstellung arbeiteten.

Die einzelnen Beweistypen wurden im Dialog unterschiedlich umgesetzt. So wurde der experimentelle Beweis in drei der vier Fälle in einem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch erarbeitet, in einem der vier Fälle wies das Unterrichtsgespräch eine höhere Partizipation der Lernenden auf, als dies üblicherweise im I-R-E-Muster (Mehan, 1979) mit kurzen Antworten der Lernenden der Fall ist.

Der operative Beweis wurde hingegen in 58.3 % der Klassen, die einen solchen erarbeiteten, mit deutlich mehr Partizipation der Lernenden realisiert als in Rahmen eines fragend-entwickelnden Unterrichtsgesprächs im I-R-E-Muster. Dieses konnte in 41.7 % der Klassen, die operativ arbeiteten, beobachtet werden.

Die grösste Varianz bezüglich Gestaltung des Unterrichtsgesprächs zeigte sich beim formal-deduktiven Beweis. Grossmehrheitlich (81 %) erfolgte die Bearbeitung im I-R-E-Muster mit wenig Partizipation der Lernenden. Aber es liessen sich auch Klassen (14.2 %) finden, in denen sie deutlich höher lag und über das übliche Beantworten von Fragen hinausging, indem beispielsweise Ideen von den Lernenden aktiv eingebracht und ausführlich elaboriert wurden. Daneben wurde in 4.8 % der Klassen, die formal-deduktiv arbeiteten, ein Modelling durch die Lehrperson beobachtet, bei dem keine aktive Partizipation der Lernenden vorgesehen war.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Partizipation der Lernenden beim operativen Vorgehen am ausgeprägtesten war, während sowohl beim experimentellen wie beim formal-deduktiven Vorgehen das I-R-E-Muster dominierte.

4 Diskussion

Welche Beweistypen treten bei der Bearbeitung der gleichen innermathematischen Beweis- und Begründungsaufgabe in der Sekundarstufe I also auf und in welcher Weise wird das Unterrichtsgespräch dazu gestaltet?

Die Resultate zeigen, dass das Beweisen der gleichen Aufgabenstellung in verschiedenen Klassen unterschiedlich verläuft. Obwohl von einer Dominanz des formal-deduktiven Beweises ausgegangen werden kann, wurde in zahlreichen Klassen ein operatives Vorgehen durchgeführt. Experimentelle Zugänge hingegen waren vergleichsweise selten. Dieser Umstand kann in Übereinstimmung mit der Literatur (vgl. Krauthausen, 2001) als funktional betrachtet werden, weil experimentelle Zugänge

insbesondere für jüngere Lernende sehr bedeutsam sind, sich die vorliegende Studie aber auf das 8./9. Schuljahr bezieht.

Erwartungskonform ist die Umsetzung der unterschiedlichen Beweistypen im Dialog. Dass die Partizipation der Lernenden am Gespräch beim formal-deduktiven Beweis tiefer ausfällt als beim operativen, ist mit dessen Formalisierung mittels algebraischer Sprache zu erklären, die einerseits den Zugang zum Gespräch für Lernende limitiert und andererseits von den Lehrpersonen eine stärkere Unterstützung verlangt.

Die Ergebnisse machen deutlich, dass es bedeutsam ist, Partizipation nicht unabhängig vom Inhalt zu erfassen, sondern sie in enger Abhängigkeit vom kognitiven Anspruch und vom Grad der Abstraktion der inhaltlichen Bearbeitung zu sehen.

Literatur

- Aebli, H. (1981): Denken. Das Ordnen des Tuns (Band 2). Stuttgart: Klett-Cotta.
- Blum, W. (2006): Einführung. Bildungsstandards. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen (S. 14 - 32). Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Brunner, E. (2012): Innermathematisches Beweisen und Argumentieren auf der Sekundarstufe I. Unveröffentlichte Dissertation. Zürich: Universität Zürich, Institut für Erziehungswissenschaft.
- Brunner, E. (2013): Innermathematisches Beweisen und Argumentieren auf der Sekundarstufe I. Münster: Waxmann.
- EDK Generalsekretariat. (2011): Grundkompetenzen für die Mathematik. Nationale Bildungsstandards. Frei gegeben von der EDK Plenarversammlung am 16. Juni 2011. Bern: EDK.
- Heintz, B. (2000): Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Wien: Springer.
- Klieme, E., Pauli, C. & Reusser, K. (2009): The Pythagoras Study. In T. Janik & T. Seidel (Hrsg.): The power of video studies in investigating teaching and learning in the classroom (S. 137 - 160). Münster: Waxmann.
- Krauthausen, G. (2001): Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat. Zum Image einer fundamentalen Tätigkeit. In W. Wieser & B. Wollring (Hrsg.): Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt (S. 99 - 113). Hamburg: Verlag Dr. Kovac.
- Mehan, H. (1979): Learning Lessons. Social Organization in the Classroom. Cambridge: Harvard University Press.
- NCTM [National Council of Teachers in Mathematics]. (Hrsg.). (2000): Principles and standards for school mathematics. Reston: NCTM.
- Wittmann, E.C. & Müller, N. (1988): Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.): Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter (S. 237 - 258). Berlin: Cornelsen.